

PENERAPAN METODE BAGI DUA DAN ALGORITMA SPIRAL DINAMIK DALAM PENENTUAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NON-LINIER

Diyah Wijayati¹, Rimba Krisnha Sukma Dewi²
Teknik Informatika¹, Teknik Industri²
Universitas Teknologi Bandung^{1,2}
diyahwijayati@gmail.com¹, rimbakrisnha80@gmail.com²

Abstrak

Mencari atau menentukan solusi dari suatu persamaan baik persamaan linier maupun persamaan non-linier adalah suatu proses pencarian atau penentuan suatu nilai peubah bebas sehingga jika nilainya disubstitusikan pada persamaan tersebut menghasilkan nilai nol. Solusi persamaan ini disebut akar persamaan atau nilai-nilai nol. Ada tiga cara atau metode untuk menyelesaikan persamaan yang pertama metode analitik, kedua metode numerik, dan ketiga menggunakan metode pendekatan numerik algoritma metaheuristik. Metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan menerapkan rumus-rumus aljabar yang sudah lazim, sedangkan metode numerik dan algoritma metaheuristik digunakan jika model matematika yang digunakan rumit dan sulit diselesaikan menggunakan metode analitik. Solusi yang diperoleh menggunakan metode analitik disebut solusi sejati, sedang solusi dari metode numerik dan algoritma metaheuristik adalah solusi pendekatan atau solusi hampiran. Meskipun solusi dari penggunaan metode numerik atau algoritma metaheuristik adalah solusi hampiran, namun kita dapat membuat solusi hampiran ini seteliti mungkin sehingga selisih atau galat dari solusi sebenarnya sangat kecil. Dalam penelitian ini, dua metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan non-linier adalah metode bagi dua dan metode pendekatan numerik menggunakan algoritma metaheuristik spiral dinamik. Tujuan penelitian ini adalah mencari akar-akar dari persamaan non-linier dengan menggunakan dua metode pendekatan numerik yaitu metode bagi dua dan algoritma metaheuristik spiral dinamik pada aplikasi *Scilab* dan *Octave*. Hasil penelitian, kedua pendekatan numerik dapat digunakan untuk mencari akar-akar persamaan non-linier dengan efisien.

Kata kunci : Solusi, persamaan non-linier, metode numerik.

Abstract

Finding or determining the solution of an equation, either a linear equation or a non-linear equation, is a process of finding or determining the value of an independent variable so that if its value is substituted into the equation, it produces a value of zero. The solution of the equation is called the roots of the equation or zero values. There are three ways or methods to solve the equation, the first is analytical method, the second is numerical method, and the third is using numerical approach method of metaheuristic algorithm. Analytical method is a method of solving mathematical models by applying familiar algebraic formulas, while numerical methods and metaheuristic algorithms are used if the mathematical model used is complex and difficult to solve using analytical methods. Solutions obtained using analytical methods are called true solutions, while solutions from numerical methods and metaheuristic algorithms are approximations or approximate solutions. Although the solution from using numerical methods or metaheuristic algorithms is an approximate solution, we can make this approximate solution as accurate as possible so that the difference or error from the true solution is very small. In this study, the two methods used to solve non-linear equations are the bisection method and the numerical approximation method using the dynamic spiral metaheuristic algorithm. The aim of this research is to find the roots of non-linear equations using two numerical approximation methods.

Keywords : Solution, non-linear equation, numerical methods.

I. PENDAHULUAN

Pemodelan matematika sangat penting dalam bidang ilmu pengetahuan dan rekayasa, dengan menggunakan pemodelan matematika ilmuwan atau insinyur dapat menggambarkan, menganalisis, dan memecahkan masalah dunia nyata. Banyak pemodelan matematika menggunakan persamaan matematika contohnya dinamika populasi, reaksi kimia, aliran fluida, sistem *chaos* dan lain sebagainya [1], [2], [3]. Pemodelan matematika merupakan proses menerjemahkan fenomena nyata ke dalam bentuk model matematis agar dapat dianalisis secara sistematis. Dalam proses tersebut, persamaan matematika menjadi salah satu alat utama yang digunakan untuk merepresentasikan hubungan antar variabel dalam suatu sistem.

Persamaan matematika adalah kalimat terbuka yang menyatakan bahwa dua ekspresi matematika adalah sama dan ditulis dengan tanda sama dengan (=) [4], [5]. Sedangkan kalimat terbuka adalah kalimat matematika yang mengandung variabel atau peubah, sehingga nilai kebenarannya belum dapat ditentukan sampai variabel tersebut dengan nilai tertentu. Jadi dapat disimpulkan bahwa persamaan matematika adalah dua ekspresi matematika yang mengandung variabel atau peubah dihubungkan dengan tanda sama dengan (=), sehingga nilai kebenarannya belum dapat ditentukan sampai dicari penyelesaiannya atau nilai tertentu sebagai pengganti variabel tersebut.

Menyelesaikan atau menentukan solusi persamaan matematika adalah proses mencari nilai tertentu yang memenuhi persamaan matematika tersebut sehingga nilai kebenarannya terbukti benar [6]. Ada tiga metode untuk mencari solusi persamaan matematika yaitu metode analitik, metode numerik, dan metode algoritma metaheuristik. Metode analitik umumnya memberikan solusi eksak dalam bentuk tertutup, namun seringkali sulit diterapkan pada persamaan yang

kompleks atau nonlinier. Oleh karena itu, metode numerik dan algoritma metaheuristik menjadi alternatif yang efektif untuk memperoleh solusi hampiran dengan tingkat ketelitian tertentu.

Pada praktiknya, banyak model matematika menghasilkan sistem persamaan non-linier yang harus diselesaikan untuk memperoleh solusi yang merepresentasikan kondisi sebenarnya. Penyelesaian sistem persamaan non-linier menjadi sangat penting karena menentukan ketepatan prediksi, analisis, maupun pengambilan keputusan pada berbagai bidang aplikasi, seperti analisis struktur, simulasi aliran fluida, optimasi proses industri, rekayasa kimia, sistem tenaga listrik, hingga kecerdasan buatan. Namun, karakteristik sistem non-linier yang kompleks, seperti adanya banyak solusi, sensitivitas terhadap nilai awal, serta kemungkinan tidak memiliki bentuk solusi analitik, menyebabkan penyelesaiannya menjadi tantangan tersendiri.

Metode konvensional, seperti eliminasi aljabar, substitusi atau penyelesaian analitik, umumnya hanya efektif untuk sistem dengan bentuk yang sederhana. Ketika dihadapkan pada sistem non-linier berdimensi besar dan kompleks, metode tersebut menjadi sulit diterapkan, memerlukan manipulasi matematis yang rumit, bahkan sering kali tidak mampu menghasilkan solusi secara langsung. Oleh karena itu, diperlukan metode numerik yang mampu menyelesaikan sistem persamaan non-linier secara efisien, akurat, dan stabil. Pengembangan serta kajian terhadap metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier menjadi penting guna mendukung penyelesaian berbagai persoalan ilmiah dan rekayasa yang semakin kompleks.

Persamaan matematika, jika dilihat dari hubungan antara variabel bebas dan variabel tetapnya dibagi menjadi dua jenis. Persamaan matematika disebut persamaan linier di mana hubungan antara variabelnya dapat digambarkan sebagai garis lurus, sedangkan jika hubungan antara variabelnya tidak dapat digambarkan sebagai garis lurus disebut persamaan non linier [7]. Persamaan linier umumnya lebih sederhana dan mudah diselesaikan baik secara analitik maupun numerik. Sebaliknya, persamaan non-linier seringkali memiliki lebih dari satu solusi atau bahkan tidak memiliki solusi eksak, sehingga memerlukan pendekatan khusus dalam proses penyelesaiannya.

Dalam penerapan model matematika, sering kali kita menghadapi persamaan non-linier satu variabel yang perlu diselesaikan. Persamaan non linier satu variabel yang diselesaikan untuk menemukan nilai variabel yang membuat persamaan tersebut sama dengan nol sangat penting dalam berbagai aplikasi praktis. Berikut adalah contoh persamaan non linier satu variabel:

1. Persamaan Biaya Total

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

di mana:

x adalah jumlah unit produksi,

a, b, c adalah konstanta yang menggambarkan faktor biaya tetap dan variabel.

2. Persamaan Optimasi dalam Penjadwalan Produksi

$$f(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma x^2 - \delta = 0 \quad (2)$$

di mana:

x adalah variabel yang menggambarkan keputusan dalam proses produksi (misalnya, jumlah produksi),

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ adalah konstanta yang berhubungan dengan parameter produksi, biaya, dan waktu.

3. Persamaan Perencanaan Kapasitas

$$f(x) = (x - a)e^{b(x-c)} - d = 0 \quad (3)$$

di mana:

x adalah kapasitas yang ingin dicapai (produksi),

a, b, c, d adalah parameter yang menggambarkan faktor-faktor produksi.

4. Persamaan dalam Manajemen Persediaan

$$f(x) = \frac{D}{x}S + \frac{x}{2}H - C = 0 \quad (4)$$

di mana:

x adalah jumlah pesanan yang optimal,

D adalah permintaan tahunan,

S adalah biaya pemesanan per unit,

H adalah biaya penyimpanan per unit,

C adalah total biaya yang ingin diminimalkan.

Pada kenyataannya, permasalahan yang dipelajari pada umumnya sebuah fenomena direpresentasikan dalam bentuk sistem persamaan yakni sebuah sistem yang disusun oleh dua atau lebih persamaan dan melibatkan dua atau lebih variabel [1], [2]. Sistem persamaan digunakan untuk menggambarkan keterkaitan antar variabel dalam suatu fenomena secara lebih komprehensif. Dalam banyak kasus, solusi dari sistem persamaan tersebut menunjukkan kondisi keseimbangan atau titik temu dari beberapa hubungan yang dimodelkan. Oleh karena itu, diperlukan metode penyelesaian yang tepat agar solusi yang diperoleh akurat dan sesuai dengan kondisi nyata, serta lebih efisien.

Berbagai penelitian terdahulu telah menggunakan Metode Bagi Dua maupun modifikasinya untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier karena metode tersebut memiliki sifat konvergen dan merupakan metode tertutup, sehingga mudah diimplementasikan. Namun, metode tersebut umumnya masih memerlukan jumlah iterasi yang relatif banyak

sehingga efisiensi komputasinya menjadi kurang optimal pada permasalahan yang kompleks. Di sisi lain, penelitian mengenai penerapan *Spiral Dynamics Optimization* (SDO) dalam penyelesaian sistem persamaan non-linier masih relatif terbatas. Penelitian yang dilakukan oleh Sidarto dan Kania telah menunjukkan bahwa SDO mampu menemukan seluruh solusi sistem persamaan non-linier melalui pendekatan optimasi dan *clustering*. Akan tetapi, penelitian tersebut belum membandingkan secara langsung performa SDO dengan Metode Bagi Dua sebagai metode deterministik klasik berdasarkan aspek akurasi, jumlah iterasi, dan efisiensi komputasi. Oleh karena itu, penelitian ini mengisi kesenjangan tersebut dengan melakukan analisis komparatif antara Metode Bagi Dua dan Algoritma Spiral Dinamik pada penyelesaian sistem persamaan non-linier. Kontribusi ilmiah penelitian ini adalah memberikan evaluasi menyeluruh mengenai keunggulan dan keterbatasan kedua metode sehingga dapat menjadi dasar dalam pemilihan metode yang paling sesuai untuk karakteristik permasalahan tertentu.

Metode Bagi Dua dipilih dalam penelitian ini karena merupakan salah satu metode numerik klasik yang memiliki algoritma sederhana, mudah diimplementasikan, serta menjamin konvergensi apabila interval yang diberikan memenuhi syarat perubahan tanda fungsi. Namun, metode ini umumnya memiliki laju konvergensi yang relatif lambat sehingga memerlukan jumlah iterasi yang lebih banyak untuk mencapai tingkat ketelitian tertentu. Sebaliknya, Algoritma Spiral Dinamik merupakan algoritma metaheuristik yang memanfaatkan pola pergerakan spiral dalam proses pencarian solusi sehingga memiliki kemampuan eksplorasi ruang solusi yang lebih fleksibel dan berpotensi memperoleh solusi secara lebih efisien tanpa bergantung pada informasi turunan fungsi. Perbedaan karakteristik antara metode deterministik dan algoritma metaheuristik tersebut menjadikan keduanya menarik untuk dibandingkan dalam penyelesaian sistem persamaan non-linier, khususnya dari aspek akurasi solusi, jumlah iterasi, efisiensi waktu komputasi, serta kestabilan konvergensi.

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: (1) bagaimana menentukan akar sistem persamaan non-linier menggunakan Metode Bagi Dua dan Algoritma Spiral Dinamik; dan (2) bagaimana membandingkan tingkat akurasi, efisiensi komputasi, jumlah iterasi, serta karakteristik konvergensi kedua metode tersebut dalam menyelesaikan sistem persamaan non-linier. Sedangkan, tujuan dari penelitian ini adalah untuk: pertama menerapkan metode numerik bagi dua dan algoritma metaheuristik spiral dinamik dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinier, kedua menganalisis dan membandingkan kinerja kedua metode berdasarkan akurasi dan efisiensi, serta menentukan metode yang paling efektif dalam menemukan solusi dari sistem persamaan nonlinier. Penelitian ini difokuskan pada penyelesaian sistem persamaan nonlinier dengan menggunakan metode numerik bagi dua dan algoritma metaheuristik spiral dinamik. Analisis yang dilakukan meliputi perbandingan hasil solusi dan efisiensi komputasi dari kedua metode tersebut. Banyak permasalahan nyata yang tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga memerlukan alternatif metode seperti numerik dan metaheuristik. Oleh karena itu, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan metode penyelesaian persamaan matematika khususnya sistem persamaan non-linier yang lebih efektif dan aplikatif.

II. TINJAUAN PUSTAKA

1. Metode Numerik

Permasalahan matematis atau perhitungan tertentu tidak selalu mudah diselesaikan. Berikut ini beberapa contoh masalah matematis yang memang dikenal sulit diselesaikan :

1. Persamaan polynomial derajat tinggi

Misalnya

$$x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7 = 0 \quad (5)$$

2. Persamaan diferensial non-linier

Misalnya

$$y'' + y^2 = \sin(x) \quad (6)$$

3. Optimasi non-linier multivariate

Misalnya

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 3xy + 2 \quad (7)$$

Untuk menyelesaikan masalah-masalah di atas diperlukan suatu metode yaitu metode pendekatan numerik yang dikenal dengan sebutan metode numerik.

Metode numerik adalah teknik atau cara yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan atau diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (+, -, ×, dan :). Solusi yang diperoleh dengan metode numerik adalah solusi hampiran atau pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan [8]. Metode ini sangat penting terutama untuk menyelesaikan permasalahan yang sulit atau tidak dapat diselesaikan secara analitik. Selain itu, metode numerik banyak diterapkan dalam berbagai bidang seperti teknik, sains, dan ekonomi untuk memperoleh solusi secara efisien dengan bantuan komputer.

Ada dua jenis persamaan matematika yang sering digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika yaitu sistem persamaan linier dan sistem persamaan non-linier. Perbedaan dari kedua sistem persamaan tersebut terletak pada hubungan antar variabel masukan dan variabel keluarannya. Persamaan linier adalah persamaan matematika yang mempunyai hubungan linier antara variabel masukan dan variabel keluarannya, dalam bentuk

grafik persamaan linier digambarkan sebagai garis lurus. Persamaan non-linier adalah persamaan matematika yang tidak mempunyai hubungan linier antara variabel di daerah domain dan daerah lawan. Dengan kata lain, laju perubahan variabel keluaran terhadap variabel masukan tidak konstan atau kemiringan garis singgungnya berbeda di setiap titik pada kurva [9], [10], [11], [12].

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah mencari akar-akar persamaan non-linier ada dua metode yaitu metode tertutup dan metode terbuka. Metode numerik yang termasuk metode tertutup adalah metode bagi dua atau metode bisection dan metode posisi palsu atau metode regula falsi. Sedangkan metode numerik yang termasuk metode terbuka yaitu metode iterasi sederhana, metode Newton Raphson, dan metode Secant. Metode tertutup umumnya memiliki keunggulan dalam hal kestabilan karena selalu mempertahankan akar berada dalam suatu selang tertentu. Sementara itu, metode terbuka cenderung memiliki laju konvergensi yang lebih cepat, namun memerlukan tebakan awal yang baik agar menghasilkan solusi yang akurat.

2. Metode Bagi Dua

Metode bagi dua adalah metode numerik tertutup untuk mencari akar persamaan $f(x) = 0$ dengan $f(x)$ adalah fungsi non-linier. Cara kerja metode ini adalah diketahui fungsi kontinu pada interval $[a, b]$ dan $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda sehingga $f(a)f(b) < 0$ hal ini merupakan syarat utama agar metode bagi dua dapat digunakan, maka ada setidaknya satu akar di antara a dan b [13], [14], [15]. Prinsip dari metode ini adalah mengurangi interval solusi dengan cara membagi interval menjadi dua setiap iterasi dengan memilih sisi yang masih mengandung akar.

Algoritma metode Bagi Dua [8], [13], [14], [15] adalah sebagai berikut:

1. Mulai dari interval $[a, b]$ dengan $f(a)f(b) < 0$.
2. Hitung titik tengah $= \frac{a+b}{2}$.
3. Hitung $f(c)$
 - Jika $f(c) = 0$ maka c adalah akar (selesai),
 - Jika $f(a)f(c) < 0$ maka akar berada di $[a, c]$; $b = c$,
 - Jika $f(c)f(b) < 0$ maka akar berada di $[c, b]$; $a = c$,
4. Ulangi langkah 2 – 3 sampai panjang interval $|b - a|$ lebih kecil dari toleransi yang diinginkan, atau sampai jumlah iterasi maksimum tercapai.

Metode bagi dua biasanya digunakan untuk fungsi non-linier yang mempunyai satu variabel bebas, sedangkan untuk dua variabel bebas metode ini perlu dimodifikasi. Salah satu modifikasi yang dapat digunakan mengurangi dimensi masalah satu per satu, misalnya mempertahankan nilai satu variabel dan mencari akar fungsi satu variabel terhadap variabel yang lain dan sebaliknya. Pendekatan ini dikenal sebagai strategi reduksi dimensi yang dilakukan secara iteratif hingga diperoleh solusi yang memenuhi kedua persamaan. Meskipun demikian, keberhasilan metode ini sangat bergantung pada pemilihan nilai awal serta kestabilan proses iterasi yang digunakan.

3. Algoritma Spiral Dinamik

Algoritma adalah langkah atau metode yang telah direncanakan dan disusun secara sistematis, terperinci dan logis untuk menyelesaikan masalah seperti masalah optimasi dan mencari akar-akar dari suatu persamaan. [9], [22]. Algoritma spiral dinamik merupakan algoritma metaheuristik yaitu yang dikembangkan oleh Tamura dan Yasuda (2011). Awalnya, algoritma spiral dinamik dimanfaatkan untuk menyelesaikan masalah optimasi dengan dua variabel bebas yang tidak memiliki kendala, akan tetapi berkembangnya pemodelan matematika yang menggunakan lebih dari dua dimensi sehingga algoritma spiral dinamik perlu diperluas ke masalah n-dimensi dengan menggeneralisasi model spiral dua dimensi menjadi n-dimensi [6], [9], [16], [17], [18], [19], [20], [21].

Algoritma Spiral Dinamik bekerja dengan menggerakkan sekumpulan kandidat solusi mengikuti pola lintasan spiral menuju solusi terbaik yang diperoleh pada setiap iterasi. Proses pencarian diawali dengan penyebaran sejumlah kandidat solusi pada ruang pencarian, kemudian posisi setiap kandidat diperbarui menggunakan transformasi rotasi dan faktor kontraksi sehingga secara bertahap bergerak mendekati pusat spiral yang merepresentasikan solusi terbaik sementara. Mekanisme tersebut memungkinkan algoritma melakukan eksplorasi ruang solusi pada tahap awal pencarian dan beralih menuju eksploitasi di sekitar solusi terbaik pada iterasi berikutnya sehingga proses pencarian menjadi lebih efektif. Dibandingkan dengan algoritma metaheuristik lainnya, seperti Algoritma Genetika dan *Particle Swarm Optimization*, Algoritma Spiral Dinamik memiliki struktur yang lebih sederhana, jumlah parameter yang lebih sedikit, serta implementasi yang relatif mudah sehingga biaya komputasinya cenderung lebih rendah. Namun demikian, kinerja algoritma tetap dipengaruhi oleh pemilihan parameter spiral dan inialisasi kandidat solusi, sehingga pada beberapa permasalahan yang kompleks masih berpotensi mengalami konvergensi menuju optimum lokal. Oleh karena itu, penelitian ini mengkaji penerapan Algoritma Spiral Dinamik dalam menentukan solusi sistem persamaan non-linier dan membandingkan kinerjanya dengan Metode Bagi Dua berdasarkan aspek akurasi, jumlah iterasi, dan efisiensi komputasi.

Misalkan diketahui sistem persamaan non linier:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

dimana $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ dan $f_i: D \rightarrow \mathbb{R} \ i = 1, 2, \dots, n$ adalah fungsi kontinu dengan minimal salah satunya fungsi non linier[6].

Kita dapat menuliskan sistem persamaan non linier di atas sebagai vektor:

$$f(x) = 0 \tag{9}$$

dimana $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Sebuah vektor $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in D$ disebut solusi atau akar dari sistem persamaan non linier jika $f(x^*) = 0$.

Untuk dapat menggunakan algoritma spiral dinamik kita perlu mengubah masalah mencari solusi sistem persamaan non linier menjadi masalah optimasi dengan cara sebagai berikut misal kita definisikan sebuah fungsi objektif $F(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n |f_i(x)|} \end{aligned} \tag{10}$$

yang mempunyai nilai maksimum 1, lihat persamaan (8).

Algoritma spiral dinamik dua dimensi yang dikembangkan oleh Tamura dan Yasuda [6], [9], [16], [17], [18], [19], [20],[21] adalah sebagai berikut:

Input: $m (\geq 2)$ the number of search points, $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$, $r (0 < r < 1)$, k_{max} maximum number of iteration

Process:

1. Randomly generate initial points $x_i(0) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, \dots, m$ in the feasible region
2. Set $k = 0$
3. Find $x^* = x_{i_g}(0)$ where $i_g = \arg \max_i F(x_i(0)), i = 1, 2, \dots, m$
4. Update $x_i : x_i(k+1) = S_2(r, \theta) x(k) - (S_2(r, \theta) - I_2) x^*, k = 1, 2, \dots, k_{max}$
5. Update $x^* : x^* = x_{i_g}(k+1), i_g = \arg \max_i F(x_i(0)), i = 1, 2, \dots, m$
6. If $k = k_{max}$ then stop. Otherwise, set $k = k + 1$ and return to step 4

Output: x^* as a maximum point of $F(x)$

Algoritma spiral dinamik untuk n dimensi adalah sebagai berikut:

Input: $m (\geq 2)$ the number of search points, $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$, $r (0 < r < 1)$, k_{max} maximum number of iteration

Process:

1. Randomly generate initial points $x_i(0) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, \dots, m$ in the feasible region
2. Set $k = 0$
3. Find $x^* = x_{i_g}(0)$ where $i_g = \arg \max_i F(x_i(0)), i = 1, 2, \dots, m$
4. Update $x_i : x_i(k+1) = S_n(r, \theta) x(k) - (S_n(r, \theta) - I_n) x^*, k = 1, 2, \dots, k_{max}$
5. Update $x^* : x^* = x_{i_g}(k+1), i_g = \arg \max_i F(x_i(0)), i = 1, 2, \dots, m$
6. If $k = k_{max}$ then stop. Otherwise, set $k = k + 1$ and return to step 4

Output: x^* as a maximum point of $F(x)$

4. Penelitian Terdahulu

Endang Sunandar [13] meneliti penyelesaian sistem persamaan non-linier menggunakan Metode Bisection dan Metode Regula Falsi yang diimplementasikan dalam bahasa pemrograman Java. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa Metode Bisection memiliki formulasi yang lebih sederhana dan mudah diimplementasikan, namun memerlukan waktu eksekusi yang lebih lama dibandingkan Metode Regula Falsi. Sebaliknya, Metode Regula Falsi mampu mencapai solusi dalam waktu yang lebih singkat, meskipun proses perhitungan nilai pendekatannya relatif lebih kompleks. Penelitian tersebut menunjukkan adanya *trade-off* antara kesederhanaan algoritma dan efisiensi komputasi, tetapi masih terbatas pada perbandingan dua metode numerik klasik.

Penelitian Jatining Wigati [14] juga membandingkan Metode Bisection dan Regula Falsi dalam menyelesaikan persamaan non-linier. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Metode Regula Falsi membutuhkan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan Metode Bisection untuk mencapai tingkat ketelitian yang sama. Meskipun demikian, penelitian tersebut hanya berfokus pada perbandingan metode numerik deterministik sehingga belum mengeksplorasi potensi algoritma metaheuristik sebagai alternatif penyelesaian sistem persamaan non-linier yang lebih kompleks.

Di sisi lain, Kuntjoro Adji Sidarto dan Adhe Kania [6] mengembangkan pendekatan *Spiral Dynamics Optimization Algorithm (SDOA)* yang dipadukan dengan teknik *clustering* untuk menemukan seluruh solusi sistem persamaan non-linier. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kombinasi tersebut mampu menemukan seluruh akar dalam daerah pencarian hanya dengan satu kali proses eksekusi, sehingga lebih efisien dan mampu menghindari ditemukannya solusi yang sama secara berulang. Namun demikian, penelitian tersebut lebih menitikberatkan pada pengembangan algoritma metaheuristik dan belum melakukan evaluasi komparatif terhadap metode numerik klasik yang umum digunakan dalam praktik dan mudah diimplementasikan.

Selain penelitian-penelitian tersebut, perkembangan penelitian terkini menunjukkan bahwa algoritma metaheuristik semakin banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier karena memiliki kemampuan eksplorasi ruang solusi yang baik, terutama pada permasalahan berdimensi tinggi dan multimodal. Meskipun demikian, sebagian besar penelitian masih berfokus pada pengembangan atau modifikasi satu algoritma tertentu tanpa membandingkan kinerjanya secara langsung dengan metode numerik klasik menggunakan indikator evaluasi yang sama.

Berdasarkan analisis penelitian terdahulu tersebut, terlihat bahwa penelitian mengenai penyelesaian sistem persamaan non-linier umumnya masih berfokus pada penggunaan satu metode tertentu atau perbandingan antar-metode numerik klasik. Sementara itu, kajian yang membandingkan secara langsung metode numerik deterministik, seperti Metode Bagi Dua, dengan algoritma metaheuristik, seperti Algoritma Spiral Dinamik, masih relatif terbatas. Selain itu, evaluasi yang dilakukan pada penelitian sebelumnya umumnya hanya meninjau satu aspek, misalnya jumlah iterasi atau waktu komputasi, sehingga belum memberikan gambaran yang menyeluruh mengenai performa masing-masing metode. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan membandingkan Metode Bagi Dua dan Algoritma Spiral Dinamik berdasarkan aspek akurasi solusi, jumlah iterasi, efisiensi waktu komputasi, dan karakteristik konvergensi. Kontribusi penelitian ini adalah memberikan analisis komprehensif mengenai kelebihan dan keterbatasan kedua pendekatan tersebut sehingga dapat menjadi acuan dalam pemilihan metode penyelesaian sistem persamaan non-linier sesuai dengan karakteristik permasalahan yang dihadapi.

5. Kerangka Pemikiran

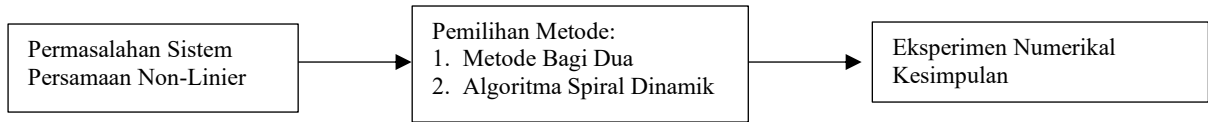
Permasalahan dalam berbagai bidang, seperti teknik, fisika, dan ekonomi, sering dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan non-linier. Sistem ini umumnya sulit diselesaikan secara analitik sehingga diperlukan metode numerik untuk memperoleh solusi pendekatan yang akurat dan efisien. Metode Bagi Dua merupakan salah satu metode numerik klasik yang sederhana dan memiliki jaminan konvergensi, namun cenderung memiliki laju konvergensi yang lambat serta pada dasarnya hanya diterapkan pada persamaan satu variabel. Untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier yang melibatkan banyak variabel, metode ini perlu dimodifikasi sehingga dapat bekerja secara bertahap melalui proses reduksi dimensi permasalahan.

Sebagai pembanding, Algoritma Spiral Dinamik dipilih karena merupakan algoritma metaheuristik yang memiliki mekanisme pencarian berbasis pergerakan spiral sehingga mampu mengeksplorasi ruang solusi secara lebih fleksibel tanpa bergantung pada turunan fungsi. Perbedaan karakteristik antara metode numerik deterministik dan algoritma metaheuristik menjadi dasar dilakukannya penelitian ini untuk mengetahui metode yang lebih efektif dalam menyelesaikan sistem persamaan non-linier.

Kerangka pemikiran penelitian ini diawali dari identifikasi permasalahan berupa pencarian solusi sistem persamaan non-linier yang sulit diselesaikan secara analitik. Selanjutnya, permasalahan tersebut diselesaikan menggunakan dua pendekatan yang berbeda, yaitu Metode Bagi Dua dan Algoritma Spiral Dinamik. Hasil penyelesaian kedua metode kemudian dibandingkan berdasarkan indikator akurasi solusi, jumlah iterasi, efisiensi waktu komputasi, dan karakteristik konvergensi. Melalui perbandingan tersebut diharapkan dapat diperoleh informasi mengenai kelebihan dan keterbatasan masing-masing metode serta rekomendasi metode yang lebih sesuai untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier sesuai dengan karakteristik permasalahan yang dihadapi.

Di sisi lain, Algoritma Spiral Dinamik sebagai bagian dari metode metaheuristik memiliki keunggulan dalam mengeksplorasi ruang solusi secara global sehingga berpotensi menemukan solusi lebih cepat dan mampu menghindari jebakan pada solusi optimum lokal. Namun, metode ini tidak selalu menjamin konvergensi yang stabil seperti metode numerik klasik terutama metode Bagi Dua karena kinerjanya dipengaruhi oleh pemilihan parameter dan proses inisialisasi kandidat solusi. Berdasarkan kelebihan dan keterbatasan masing-masing metode, diperlukan analisis perbandingan untuk mengetahui kinerja Metode Bagi Dua dan Algoritma Spiral Dinamik dalam menyelesaikan sistem persamaan non-linier. Perbandingan dilakukan berdasarkan beberapa indikator evaluasi, yaitu **akurasi solusi** yang diukur dari galat (error) terhadap solusi acuan, **jumlah iterasi** yang

diperlukan hingga memenuhi kriteria penghentian, **waktu komputasi** yang dibutuhkan untuk memperoleh solusi, serta **karakteristik konvergensi**, yang meliputi kemampuan metode mencapai solusi secara konsisten dan kestabilan proses konvergensinya. Melalui indikator-indikator tersebut diharapkan dapat diperoleh gambaran yang lebih komprehensif mengenai kelebihan dan keterbatasan masing-masing metode sehingga dapat ditentukan metode yang lebih sesuai untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier dengan karakteristik permasalahan yang berbeda.



Gambar 1. Kerangka Pemikiran

III. EKSPERIMEN

Beberapa sistem persamaan non linier digunakan dalam eksperimen numerikal untuk menguji efisiensi metode bagi dua dan algoritma spiral dinamik dalam mencari solusi. Untuk metode bagi dua menggunakan software *Scilab*, sedangkan koding algoritma spiral dinamik dibuat dan dikompilasi menggunakan software *Octave*.

1. Problem 1

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{11}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (11) metode yang digunakan metode bagi dua yang disajikan dalam tabel berikut:

TABEL I
 SOLUSI PROBLEM 1 (Y = KONSTAN)

Percobaan	x	$f(x, y)$	Waktu (detik)
1 $y = 1$	1.731995	-0.000195	0.004434
2 $y = 1.2$	1.600037	0.000117	0.007315
3 $y = 1.3$	1.519836	-0.000097	0.005588

TABEL III
 SOLUSI PROBLEM 1 (X = KONSTAN)

Percobaan	y	$f(x, y)$	Waktu (detik)
1 $x = 1$	1.732086	0.000123	0.007053
2 $x = 1.2$	1.600067	0.000215	0.005628
3 $x = 1.3$	1.519867	-0.000004	0.005753

2. Problem 2

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 25 &= 0 \\ y - x^2 + 4 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (12) menggunakan metode bagi dua dengan memodifikasi sistem persamaan (12) dengan cara mensubstitusi variabel y pada persamaan $y - x^2 + 4 = 0$ ke persamaan $x^2 + y^2 - 25 = 0$, sehingga bentuk dari sistem persamaan di atas menjadi $x^4 - 7x^2 - 9 = 0$ persamaan non-linier dengan satu variabel bebas dengan daerah definisi $D = \{x | 2.5 \leq x \leq 3\}$, hasil yang diperoleh disajikan dalam tabel berikut:

TABEL IIIII
 SOLUSI PROBLEM 2 MENGGUNAKAN METODE BAGI DUA

Iterasi	a	b	$c = \text{Nilai Tengah}$	$f(c)$
0	2.500000	3.000000	2.750000	-4.746094
1	2.750000	3.000000	2.875000	1.461182
2	2.750000	2.875000	2.812500	-1.800522
3	2.812500	2.875000	2.843750	-0.210219
4	2.843750	2.875000	2.859375	0.615213
5	2.843750	2.859375	2.851563	0.199946

6	2.843750	2.851563	2.847656	-0.005772
7	2.847656	2.851563	2.849609	0.096928
8	2.847656	2.849609	2.848633	0.045538
9	2.847656	2.848633	2.848145	0.019873
10	2.847656	2.848145	2.847900	0.007048
11	2.847656	2.847900	2.847778	0.000637
12	2.847656	2.847778	2.847717	-0.002567

Solusi persamaan adalah 2.847717 setelah 13 iterasi dan nilai $y = 4.109494$ dengan nilai fungsi 1 = -0.002567 dan nilai fungsi 2=0.000000, dan waktu eksekusi program: 0.004254 detik.

Sistem persamaan non linier (12) diselesaikan menggunakan algoritma spiral dinamik dengan parameter yang digunakan = $\{(x, y): 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$, $r = 0,95$, $\theta = \pi/4$, $m = 250$, dan $k_{\max} = 250$ disajikan dalam tabel berikut:

TABEL IV
 SOLUSI PROBLEM 2 MENGGUNAKAN ALGORITMA SPIRAL DINAMIK

Percobaan	x	y	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y)$	Waktu (detik)
1	2.84776684	4.10977183	5.634813788e-07	-4.173735611e-06	0.134800
2	2.84776622	4.10977228	6.862158699e-07	-1.797530124e-07	0.058802
3	2.84776618	4.10977223	4.484612858e-08	-3.280465410e-08	0.081874
4	2.84776612	4.10977229	2.205336145e-07	4.264463662e-07	0.087509
5	2.84776635	4.10977211	-6.55273347e-08	-1.052810218e-06	0.086097

3. Problem 3

$$f_1(x_1, x_2) = e^{x_1-x_2} - \sin(x_1 + x_2) = 0 \quad (13)$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 - \cos(x_1 + x_2) = 0$$

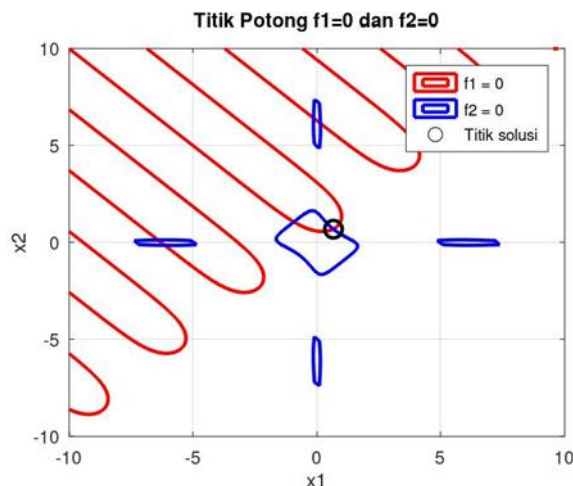
dengan $D = \{(x_1, x_2): -10 \leq x_1 \leq 10, -10 \leq x_2 \leq 10\}$

Sistem persamaan non linier (13) diselesaikan menggunakan algoritma spiral dinamik dengan parameter yang digunakan $r = 0,95$, $\theta = \pi/4$, $m = 250$, dan $k_{\max} = 250$ disajikan dalam tabel berikut:

TABEL V
 SOLUSI PROBLEM 3

Percobaan	x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$	Waktu (detik)
1	-0.9321226	1.0678737	3.66414608e-05	2.23350045e-05	10.417892
2	0.66712100	0.69010315	-4.224902268e-05	-3.325982749e-06	9.991595
3	-6.1171125	-0.1634756	6.2126662032e-06	1.952497671e-04	9.763172
4	-0.9321221	1.0678744	3.5915919843e-05	-7.74243373e-05	9.931682
5	-6.43716202	0.15534803	-1.74419185e-05	-4.29377884e-05	10.012096

Berikut adalah grafik dari sistem persamaan non linier(13) dengan $D = \{(x_1, x_2): -10 \leq x_1 \leq 10, -10 \leq x_2 \leq 10\}$



Gambar 2. Grafik Problem 3

4. Problem 4

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 6 = 0 \\
 f_2(x) &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 6 = 0 \\
 f_3(x) &= x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - 6 = 0 \\
 f_4(x) &= x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 6 = 0 \\
 f_5(x) &= x_1x_2x_3x_4x_5 - 1 = 0
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

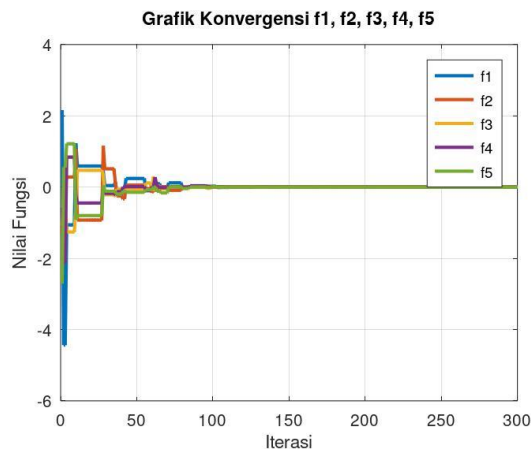
dengan $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$ dan $D = \{x: -10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$

Sistem persamaan non linier (14) diselesaikan menggunakan menggunakan algoritma spiral dinamik dengan parameter yang digunakan $r = 0,95$, $\theta = \pi/4$, $m = 300$, dan $k_{\max} = 300$ disajikan dalam tabel berikut:

TABEL VI
SOLUSI PROBLEM 4

Percobaan	$x_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5)$	$f_i(x), (i=1, 2,3,4,5)$	Waktu (detik)
1	-0.5790 -0.5790 -0.5790 -0.5790 8.8952	-4.2210e-07 -4.3403e-08 5.5339e-07 -1.3070e-07 7.6647e-07	0.198730
2	0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 1.0259	5.1375e-07 3.2769e-08 6.6407e-07 -6.5919e-07 4.8126e-03	0.184279
3	0.9801 0.9801 0.9801 0.9801 1.0997	-2.8861e-07 -1.1837e-06 -8.7072e-08 -1.5012e-07 1.4575e-02	0.183089
4	0.8410 0.8410 0.8410 0.8410 1.7950	3.7470e-05 -1.5163e-05 1.5021e-06 8.1472e-07 -1.0206e-01	0.189991
5	0.9387 0.9387 0.9387 0.9387 1.3066	-2.8557e-07 -2.7941e-07 7.8123e-08 -8.5239e-07 1.4405e-02	0.216737

Berikut adalah grafik dari sistem persamaan non linier (14) dengan $D = \{x: -10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$



Gambar 3. Grafik Problem 4

IV. KESIMPULAN

Persamaan non-linier banyak digunakan dalam pemodelan matematika di berbagai bidang sains dan rekayasa. Untuk menyelesaikan persamaan non-linier diperlukan metode pendekatan, salah satunya adalah metode numerik. Namun, pada sistem persamaan non-linier yang melibatkan lebih dari dua variabel, metode numerik klasik sering kali memerlukan modifikasi atau pendekatan lain sehingga algoritma metaheuristik dapat menjadi alternatif untuk menemukan akar-akar sistem persamaan non-linier. Dalam penelitian ini dilakukan perbandingan antara Metode Bagi Dua dan Algoritma Spiral Dinamik berdasarkan waktu komputasi dalam menentukan solusi sistem persamaan non-linier.

Hasil eksperimen numerik menunjukkan bahwa untuk menyelesaikan persamaan (11), Metode Bagi Dua memerlukan waktu rata-rata 0,00578 detik dan 0,00614 detik. Pada persamaan (12), Metode Bagi Dua memerlukan waktu rata-rata 0,004254 detik, sedangkan Algoritma Spiral Dinamik memerlukan waktu rata-rata 0,08982 detik. Untuk persamaan (13) dan (14), penyelesaian menggunakan Algoritma Spiral Dinamik memerlukan waktu rata-rata masing-masing sebesar 10,02329 detik dan 0,19457 detik.

Berdasarkan hasil eksperimen tersebut, kedua metode mampu digunakan untuk menentukan solusi sistem persamaan non-linier sesuai dengan karakteristik permasalahan yang dihadapi. Untuk kasus yang dapat diselesaikan menggunakan kedua metode, Metode Bagi Dua menunjukkan efisiensi waktu komputasi yang lebih baik dibandingkan Algoritma Spiral Dinamik. Sementara itu, Algoritma Spiral Dinamik memiliki keunggulan dalam menangani permasalahan yang lebih kompleks dan berdimensi lebih tinggi, sehingga berpotensi menjadi alternatif ketika metode numerik klasik sulit diterapkan.

Kontribusi utama penelitian ini adalah memberikan analisis komparatif antara metode numerik deterministik dan algoritma metaheuristik dalam penyelesaian sistem persamaan non-linier berdasarkan indikator waktu komputasi. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pemilihan metode penyelesaian perlu disesuaikan dengan karakteristik permasalahan yang dihadapi, sehingga dapat menjadi acuan bagi peneliti maupun praktisi dalam menentukan metode yang paling sesuai. Penelitian selanjutnya disarankan untuk memperluas perbandingan dengan algoritma metaheuristik lainnya, seperti *Particle Swarm Optimization*, *Genetic Algorithm*, atau *Differential Evolution*, serta menambahkan indikator evaluasi lain, seperti akurasi solusi, jumlah iterasi, dan karakteristik konvergensi agar diperoleh analisis yang lebih komprehensif.

REFERENSI

- [1] R. Aprilia, D. J. Panjaitan, *Pemodelan Matematika*, penerbit LPPM UMNAW 2022. Available: <http://repository.uinsu.ac.id/17581/1/Pemodelan%20Matematika%20Final.pdf>.
- [2] M. Z. Ndi, *Pemodelan Matematika*, penerbit PT. Nasya Expanding Management, 2022. Available: <https://www.researchgate.net/publication/358878418>
- [3] Wikipedia, "Definisi Model Matematika", (online) available: https://id.wikipedia.org/wiki/Model_matematika&ved=2ahUKewJLZK865CNAxWW-DgGHbZOB18QFnoFCIEBEAE&usq=AOvVaw2WHh93wy4b0IEZYDE3du_q
- [4] Wikipedia, "Definisi Persamaan Matematika", (online) available: <https://id.wikipedia.org/wiki/Persamaan>
- [5] "Equation", (online) available: <https://www.cuemath-com.translate.goog/algebra/equation/>
- [6] K. A. Sidarto, A. Kania, "Finding All Solutions of Systems of Nonlinear Equations Using Spiral Dynamics Inspired Optimization with Clustering", *JACII*, vol. 19, No. 5, 2015. Available: <https://doi.org/10.20965/jacii.2015.p0697>
- [7] "Fungsi Non Linier", [online], available: <https://www.cuemath-com.translate.goog/calculus/nonlinear-functions/>
- [8] R. Munir, *Metode Numerik, revisi keempat*, penerbit Informatika Bandung, 2015.
- [9] D. Wijayati, R. K. S. Dewi, "Optimasi Fungsi NonLinier Menggunakan Algoritma Spiral Dinamik", *Sistemik*, Vol. 12, No. 01 Juni 2024. Available: <https://sistemik.utb-univ.ac.id/index.php/sistemik/issue/view/12>
- [10] J. Sapari, S. Bahri, "Penentuan Akar-akar Persamaan NonLinier Dengan Metode Iterasi Baru", *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. 4, No. 4, Hal.49-56. Available: <https://doi.org/10.25077/jmu.4.4.49-56.2015>
- [11] M. Saffitri, M. Subhan, "Penyelesaian Permasalahan Non Linear dengan Pendekatan Linearisasi Dua Fase", *UNPjoMath*, Vol. 3, No.1, Maret 2020. Available : <https://download.garuda.kemdikbud.go.id/article.php?article=3034064&val=27501>
- [12] I. Pratikno, N. Kusumastuti, dan B. Prihandono, "Penyelesaian Persamaan Nonlinear Berderajat Dua Menggunakan Metode Hopfield Modifikasi", *Bimaster*, volume 04, No. 3 (2015), Hal 353-362. Available: <https://jurnal.untan.ac.id/index.php/jbmstr/article/view/12659/11472>
- [13] E. Sunandar, "Penyelesaian Sistem Persamaan Non Linier dengan Metode Bisection dan Metode Regula Falsi Menggunakan Bahasa Program Java", *Petir*, Vol. 12, No. 2, September 2019. Available: <https://jurnal.itpln.ac.id/petir/article/download/490/483/2713>
- [14] J. Wigati, " Solusi Numerik Persamaan Non-Linier dengan Metode Bisection dan Regula Falsi", *G-Tech FTIKA Unira Malang*, Vol. 1, No. 1, Oktober 2017. Available: <https://doi.org/10.33379/gtech.v1i1.262>.
- [15] E. Jumiasri, S. Bahri, dan B. Ginting, "Penyelesaian Persamaan NonLinier dengan Metode Modifikasi Bagi Dua", *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. 4 No. 1, Hal 68-75. Available: <https://jmua.fmipa.unand.ac.id/index.php/jmua/article/download/174/171>
- [16] K. Tamura, K. Yasuda, "Spiral Dynamics Inspired Optimization," *JACII*, vol 15, No. 8, pp. 1116-1122, 2011, available: <https://doi.org/10.20965/jacii.2011.p1116>
- [17] K. A. Sidarto, A. Kania, (2018), "Computing Complex Roots of Systems of Nonlinear Equations Using Spiral Optimization Algorithm with Clustering". *Computational Science and Technology* (Lecture Notes in Electrical Engineering). Available: https://www.researchgate.net/publication/323361615_Computing_Complex_Roots_of_Systems_of_Nonlinear_Equations_Using_Spiral_Optimization_Algorithm_with_Clustering
- [18] K. A. Sidarto, A. Kania, dan N. Sumarti, "Finding Multiple Solutions of Multimodal Optimization Using Spiral Optimization Algorithm With Clustering", *Mendel*, vol. 23, No. 1, 2017. Available: <https://doi.org/10.13164/mendel.2017.1.095>
- [19] A. N. K. Nasir, R. M. T. Raja Ismail, and M. O. Tokhi, "Adaptive Spiral Dynamics Metaheuristic Algorithm for Global Optimization With Application to Modelling of A Flexible System", *Applied Mathematical Modelling* 40, 5442-5461, Elsevier, 2016. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.002>
- [20] M. R. Hashim, M. O. Tokhi, "Chaotic Spiral Dynamics Optimization Algorithm", *Clawar*, 2016, p. 551 – 558. Available: <https://core.ac.uk/download/pdf/227105461.pdf>

- [21] Omar, M. B., Bingi, K., and Ibrahim, R. (2022). Recent Advances and Applications of Spiral Dynamics Optimization Algorithm: A Review. *Fractal and Fractional*, 6(1), 27. Available : <https://www.mdpi.com/2504-3110/6/1/27>
- [22] X. S. Yang, "Nature – Inspired Optimization Algorithms", edisi pertama, Elsevier, 2014. Available: https://msulaiman.org/onewebmedia/Xin-She_Yang_Auth_Nature-Inspired_Optimization_Algorithms.pdf