

# OPTIMASI FUNGSI NONLINIER MENGGUNAKAN ALGORITMA SPIRAL DINAMIK

Diyah Wijayati<sup>1</sup>, Rimba Krisnha Sukma Dewi<sup>2</sup>  
Fakultas Industri Kreatif, Departemen Teknik Informatika<sup>1</sup>, Departemen Teknik Industri<sup>2</sup>  
Universitas Teknologi Bandung<sup>1,2</sup>  
diyahwijayati@gmail.com<sup>1</sup>, rimbakrisnha80@gmail.com<sup>2</sup>

## Abstrak

Fungsi non-linier adalah fungsi matematika yang tidak mempunyai hubungan linier antara variabel masukan dengan variabel keluaran, dengan kata lain kemiringan garis singgungnya berbeda di setiap titik pada kurva. Fungsi non-linier sering menjadi formula matematika dalam bidang ekonomi, sains, dan rekayasa. Fungsi matematika dapat ditulis dalam bentuk persamaan, bentuk umum persamaan non-linier adalah persamaan yang melibatkan persamaan rasional, persamaan transenden dan persamaan campuran mengandung baik persamaan polinom maupun persamaan transenden. Optimasi adalah proses menemukan nilai di domain yang memberikan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi non-linier. Menyelesaikan masalah optimasi dapat dilakukan dengan dua cara yaitu metode analitik dan metode numerik. Tujuan penelitian ini mencari nilai maksimum suatu fungsi nonlinier menggunakan pendekatan numerik yaitu metode metaheuristik algoritma spiral dinamik pada *Octave*. Algoritma metaheuristik spiral dinamik terinspirasi oleh fenomena spiral di alam. Fenomena spiral di alam ada dua jenis yaitu spiral Archimedes seperti bentuk spiral obat nyamuk bakar dan spiral logaritmik seperti cangkang bia genge, tornado, galaksi bima sakti. Algoritma metaheuristik spiral dinamik pertama kali diusulkan untuk menyelesaikan optimasi dua dimensi tanpa kendala didasarkan pada model spiral logaritmik. *Octave* adalah suatu perangkat lunak gratis yang menggunakan bahasa tingkat tinggi untuk komputasi numerik dan visualisasi data. Nilai maksimum yang diperoleh adalah nilai maksimum lokal atau nilai maksimum relatif. Kata kunci: Fungsi Non-Linier, Optimasi, Algoritma Metaheuristik.

## Abstract

*Non-linear functions are mathematical functions that do not have a linear relationship between input variables and output variables, in other words slope of the tangent line is different at each point on the curve. Non-linear functions often a mathematical formula in economics, science, and engineering. Mathematical functions can be written in the form of equations, the general form of non-linear equations are equations involving rational equations, transcendental equations and mixed equations containing both polynomial and transcendental equations. Optimizations are process to find solution in domain which gives the maximum or minimum value of a non-linear function. Solving optimization problems can be done in two ways, namely analytical methods and numerical methods. The aim of this research is to find the maximum value of a non-linear function using numerical approach is metaheuristic method, spiral dynamic algorithm at Octave. The dynamic spiral metaheuristic algorithm is inspired by the spiral phenomenon in nature. There are two types of spiral phenomena in nature, namely Archimedes' spiral such as the spiral shape of mosquito coils and logarithmic spirals such as nautilus shells, tornadoes, Bima Sakti galaxies. The first time dynamic spiral metaheuristic algorithm proposed to solve unconstrained two-dimensional optimization is based on the logarithmic spiral model. Octave is a free software that uses a high-level language for numerical computation and data visualization. The maximum value of a non-linear obtained is the local or relative maximum value.*

*Keywords: Non-Linear Function, Optimization, Metaheuristic Algorithm.*

## I. PENDAHULUAN

Definisi fungsi dalam matematika adalah aturan yang memetakan atau memetakan setiap nilai di daerah domain atau masukan ke tepat satu nilai dalam himpunan lawan atau keluaran [1],[2]. Fungsi ada dua jenis yaitu fungsi linier dan fungsi non-linier. Fungsi non-linier adalah fungsi matematika yang tidak mempunyai hubungan linier antara variabel di daerah domain dan daerah lawan. Dengan kata lain, laju perubahan variabel keluaran terhadap variabel masukan tidak konstan atau kemiringan garis singgungnya berbeda di setiap titik pada kurva [3].

Fungsi non-linier sering menjadi formula matematika dalam bidang ekonomi, sains, dan rekayasa. Bentuk umum fungsi atau persamaan non-linier adalah persamaan yang melibatkan persamaan rasional, persamaan transenden yaitu persamaan yang mengandung fungsi-fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi eksponen, atau fungsi hiperbolik, dan persamaan campuran, mengandung baik persamaan polinom maupun persamaan transenden [4].

Optimasi dapat didefinisikan sebagai suatu proses mencari nilai di himpunan masukan yang memberikan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi [5]. Dengan metode analitik nilai maksimum atau minimum dari suatu persamaan  $y = f(x)$  dapat diperoleh dengan mencari turunan pertamanya kemudian mencari nilai  $x$  yang memenuhi  $y' = f'(x) = 0$ . Selanjutnya dengan menggunakan nilai  $x$  yang diperoleh, dilakukan uji turunan pertama.

Sedangkan untuk fungsi non-linier yang sulit untuk diturunkan atau mempunyai turunan yang sulit dicari akarnya proses optimasi dapat dilakukan dengan cara numerik. Dengan berkembangnya ilmu pengetahuan muncul optimasi metaheuristik yaitu menyelesaikan masalah optimasi menggunakan algoritma metaheuristik. Algoritma metaheuristik terdiri dari dua kata yaitu algoritma dan metaheuristik, algoritma adalah langkah atau metoda yang telah direncanakan dan disusun secara sistematis, terperinci dan logis untuk menyelesaikan masalah. Sedangkan metaheuristik merupakan gabungan dari kata *meta* berasal dari bahasa Yunani yang artinya melampaui dan *heuristic* menurut kamus besar bahasa Indonesia adalah seni atau ilmu yang berhubungan dengan penemuan. Metaheuristik dapat didefinisikan sebagai seni

atau strategi tingkat tinggi dalam menyelesaikan persoalan. Algoritma metaheuristik adalah metode lanjut atau tingkat tinggi yang telah direncanakan dan disusun secara sistematis, terperinci dan logis untuk menyelesaikan persoalan khususnya masalah optimasi secara efisien [6], [7].

Algoritma-algoritma metaheuristik yang dikenal dan banyak diterapkan dalam masalah optimasi antara lain: *Simulated Annealing* (Kirkpatrick, 1984), *Genetic Algorithm* (Holland, 1984), *Differential Evolution* (R. Storn dan K. Price, 1996 dan 1997), *Ant Colony Algorithm* (Dorigo, et al., 2008), *Particle Swarm Optimization* (Kennedy and Eberhart, 1995), *Firefly Algorithms* (Xin-She Yang, 2007), *Cuckoo Search* (Xin-She Yang dan Suash Deb, 2009), *Bat Algorithm* (Xin-She Yang, 2010), *Harmony Search* (Zong Woo Geem et al., 2001), *The Flower Algorithm* (Xin-She Yang, 2012) [8] dan masih banyak algoritma-algoritma yang lain.

Algoritma metaheuristik spiral dinamik dikembangkan oleh Tamura dan Yasuda (2011). Algoritma optimasi spiral dinamik terinspirasi oleh fenomena spiral di alam seperti tornado, cangkang bia genge atau nautilus, galaksi bima sakti, obat nyamuk bakar dan lain-lain [9]. Pada awalnya algoritma spiral dinamik ini digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dua dimensi tanpa kendala, akan tetapi berkembangnya pemodelan matematika yang menggunakan lebih dari dua dimensi sehingga algoritma spiral dinamik perlu diperluas ke masalah n-dimensi dengan menggeneralisasi model spiral dua dimensi menjadi n-dimensi [10], [11], [12], [13].

Dalam penelitian ini, peneliti membatasi dimensi dari masalah optimasi pada optimasi dua dimensi. Nilai optimum yang dicari adalah nilai maksimum lokal atau nilai maksimum relatif fungsi non-linier dengan menggunakan lima buah fungsi non-linier sebagai eksperimen numerik pada *software Octave*. *Octave* adalah perangkat lunak gratis yang menggunakan bahasa tingkat tinggi untuk komputasi numerik dan visualisasi data. Pada awalnya *Octave* dimaksudkan sebagai perangkat lunak pendamping pada buku desain reaktor kimia yang ditulis oleh James B. Rawling (Universitas Wisconsin-Madison) dan John G. Ekerdt (Universitas Texas). Dengan berkembangnya ilmu pengetahuan alam yang memerlukan alat komputasi maka John W. Eaton (Universitas Texas) mengembangkan *software Octave* [14].

## II. LANDASAN TEORI

### 1. Transformasi Rotasi

Transformasi adalah perubahan sedang geometri adalah segala sesuatu yang berkaitan dengan suatu bangun, garis, titik, dan pengukurannya. Jadi transformasi geometri adalah perubahan posisi dan ukuran suatu objek (titik, garis, kurva, atau bidang) pada bidang geometri dan dapat dinyatakan dalam gambar dan matriks [15].

Ada empat macam transformasi geometri yaitu: (1) Transformasi translasi atau pergeseran adalah memindahkan titik-titik pada suatu bidang dengan arah dan jarak tertentu. (2) Transformasi refleksi atau pencerminan adalah transformasi yang memetakan setiap titik pada bangun datar menggunakan sifat bayangan pada cermin datar sehingga akan terbentuk bayangan dengan bentuk yang sama dengan bendanya. (3) Dilatasi adalah perubahan jarak titik-titik dengan factor pengali tertentu. (4) Transformasi rotasi atau putaran adalah memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh sudut  $\theta$ .

Rumus umum transformasi rotasi terhadap titik pusat (0,0) diputar berlawanan arah dengan jarum jam adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \quad (1)$$

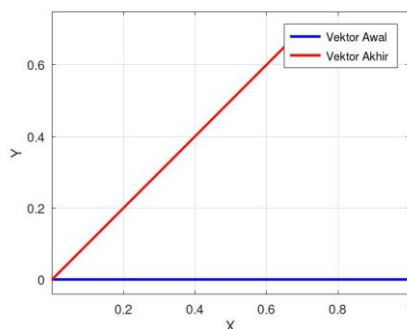
dengan

$x_1$  = komponen vektor pada sumbu-x

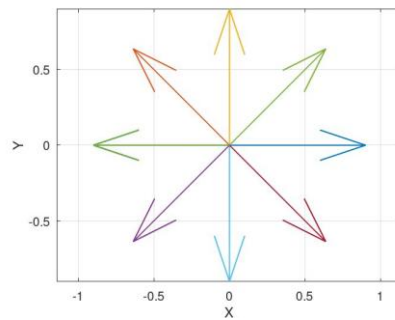
$x_2$  = komponen vektor pada sumbu-y

$\theta$  = sudut putar

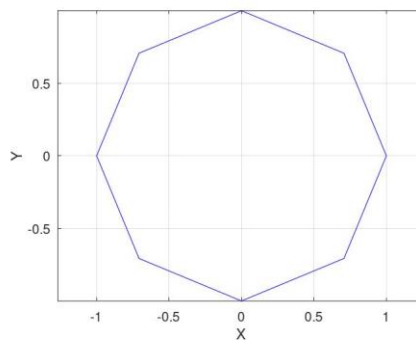
Berikut adalah gambar dari transformasi rotasi vektor (1,0) terhadap titik pusat (0,0) sejauh  $\frac{\pi}{4}$  berlawanan arah dengan jarum jam:



Gambar 1. Plot Transformasi Rotasi Vektor (1,0) Sejauh  $\theta = \frac{\pi}{4}$



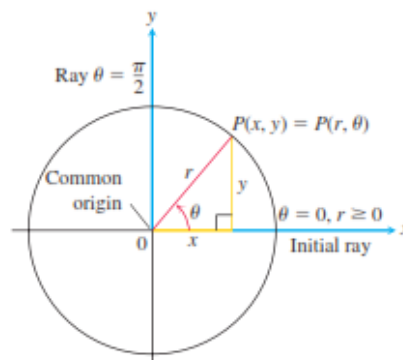
Gambar 2. Plot Transformasi Rotasi Vektor (1,0) Diputar Sebanyak 8 Kali Sejauh  $\theta = \pi/4$



Gambar 3. Plot Transformasi Rotasi dengan  $\theta = \pi/4$  dan  $k = 8$

## 2. Model Spiral

Pengertian spiral dalam matematika adalah kurva atau lengkungan yang berasal dari suatu titik, bergerak semakin jauh saat berputar mengelilingi titik tersebut. Model spiral dua dimensi dapat dijelaskan dengan mudah menggunakan sistem koordinat kutub. Sistem koordinat polar atau kutub dibangun dengan sumbu polar atau initial ray dan titik asal disebut dengan pole dari sistem koordinat polar [16], [17], [18].

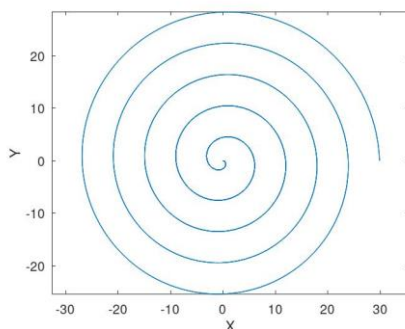


Gambar 4. Sistem Koordinat Polar

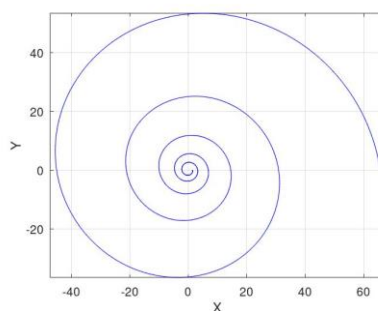
Notasi sistem koordinat polar adalah  $(r, \theta)$  dengan  $\theta$  adalah sudut rotasi disebut ray, dan  $r$  adalah jarak keluar dari sumbu pusat koordinat.

Hubungan antara sistem koordinat kartesius  $(x, y)$  dan sistem koordinat polar  $(r, \theta)$  sebagai berikut:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



Gambar 5a. Spiral Archimedean



Gambar 5b. Spiral Logaritmik

Spiral Archimedean adalah bentuk spiral dua dimensi ditemukan oleh Archimedes [8]. Bentuk dari spiralnya seperti pada gambar 5a. Rumus umum spiral Archimedes adalah sebagai berikut:

$$r = a + b \theta \tag{2}$$

dengan

$a$  = menggerakkan titi pusat spiral keluar dari titik asal.

$b$  = mengatur jarak antar setiap spiral

Spiral logaritmik adalah kurva spiral yang memiliki kemiripan terhadap dirinya sendiri sehingga sudut antara garis singgung dan vektor jari-jari adalah sama untuk semua titik spiral. Spiral logaritmik pertama kali dijelaskan oleh Albrecht Dürer (1525) [17], [19], [20]. Bentuk dari spiralnya seperti pada gambar 5b. Bentuk persamaan spiral logaritmik sebagai berikut:

$$r = a e^{b\theta} \tag{3}$$

dengan

$r$  = jarak dari titik asal

$\theta$  = sudut terhadap sumbu-x

$a$  = konstanta sembarang

$b$  = konstanta sembarang

Perbedaan spiral Archimedean dan spiral logaritmik adalah jarak antara putarannya, pada spiral Archimedean jarak antara putaran konstan seperti pada barisan aritmetika selisih antara barisannya konstan, sedangkan pada spiral logaritmik jarak antara putaran menaik seperti deret geometri. Sehingga spiral logaritmik juga dikenal sebagai spiral pertumbuhan, spiral ekuivalen dan spira mirabilis [8],[16],[17].

Bentuk persamaan spiral logaritmik dapat dinyatakan secara parametric sebagai berikut:

$$x = r \cos \theta = a \cos \theta e^{b\theta} \tag{4}$$

$$y = r \sin \theta = a \sin \theta e^{b\theta} \tag{4}$$

Bentuk umum model spiral sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \text{ dengan } 0 < r < 1 \tag{5}$$

3. Algoritma Spiral Dinamik

Model spiral pada persamaan (5) tidak cukup fleksibel untuk diaplikasikan karena pusat dari peputarannya hanya pada titik asal [1]. Sehingga persamaan (5) diubah menjadi:

$$x(k+1) = S_2(r, \theta) x(k) - (S_2(r, \theta) - I_2) x^* \tag{6}$$

dengan

$$S_2(r, \theta) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ dan } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritma spiral dinamik dua dimensi yang dikembangkan oleh Tamura dan Yasuda [1], [2], [4], [9] adalah sebagai berikut:

**Input:**  $m (\geq 2)$  the number of search points,  $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ ,  $r (0 < r < 1)$ ,  $k_{max}$  maximum number of iteration

**Process:**

1. Randomly generate initial points  $x_i(0) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, \dots, m$  in the feasible region
2. Set  $k = 0$
3. Find  $x^* = x_{i_g}(0)$  where  $i_g = \arg \max_i F(x_i(0)), i = 1, 2, \dots, m$
4. Update  $x_i : x_i(k+1) = S_2(r, \theta) x_i(k) - (S_2(r, \theta) - I_2) x^*, k = 1, 2, \dots, k_{max}$
5. Update  $x^* : x^* = x_{i_g}(k+1), i_g = \arg \max_i F(x_i(k+1)), i = 1, 2, \dots, m$
6. If  $k = k_{max}$  then stop. Otherwise, set  $k = k + 1$  and return to step 4

**Output:**  $x^*$  as a maximum point of  $F(x)$

III. EKSPERIMEN NUMERIKAL

Beberapa fungsi non-linier yang digunakan untuk eksperimen numerikal dalam penelitian ini yaitu : fungsi *Rastrigin* dua dimensi, fungsi *Ursem Waves*, fungsi *Bird*, fungsi *Camel-Six Humps*, dan fungsi *Egg Crate*. Koding algoritma metaheuristik spiral dinamik dibuat dan dikompilasi menggunakan *software Octave*.

1. Fungsi *Rastrigin* Dua Dimensi

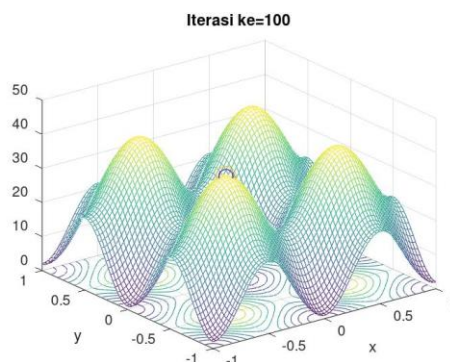
$$f(x, y) = x^2 - 10 \cos(2\pi x) + 10 + y^2 - 10 \cos(2\pi y) + 10 \tag{7}$$

dengan  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

Parameter yang digunakan  $r = 0,95, \theta = \pi/4, m = 100$ , dan  $k_{max} = 100$

TABEL I  
NILAI MAKSIMUM RELATIF FUNGSI RASTRIGIN DUA DIMENSI

Percobaan	x	y	Nilai Maksimum Relatif
1	-0,50264	-0,50264	40,5025
2	0,50257	-0,5027	40,5025
3	-0,50225	0,50231	40,5025
4	0,50243	0,50257	40,5025



Gambar 6a. Fungsi Rastrigin Dua Dimensi

2. Fungsi *Ursem Waves*

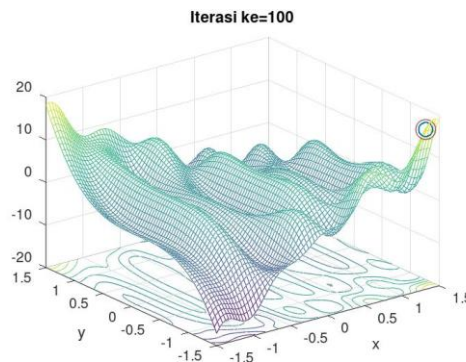
$$f(x, y) = -0,9 x^2 + (y^2 - 4,5 y^2) x y + 4,7 \cos(3x - y^2(2 + x)) \sin(2,5\pi x) \quad (8)$$

dengan  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2, -1,5 \leq x \leq 1,5, -1,5 \leq y \leq 1,5\}$

Parameter yang digunakan  $r = 0,95, \theta = \pi/4, m = 100$ , dan  $k_{\max} = 100$

TABEL II  
 NILAI MAKSIMUM RELATIF FUNGSI URSEM WAVES

Percobaan	x	y	Nilai Maksimum Relatif
1	1,3244	-1,5	17,7044
2	-1,1985	1,5	12,8304



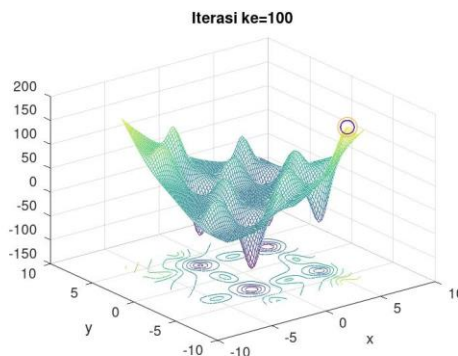
Gambar 6b. Fungsi Ursem Waves

3. Fungsi *Bird*

$$f(x, y) = \sin(x) e^{(1-\cos(y))^2} + \cos(y) e^{(1-\sin(x))^2} + (x - y)^2 \quad (9)$$

dengan  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2, -2\pi \leq x \leq 2\pi, -2\pi \leq y \leq 2\pi\}$

Parameter yang digunakan  $r = 0,95, \theta = \pi/4, m = 100$ , dan  $k_{\max} = 100$  diperoleh nilai  $x = 4,8067, y = -6,2832$ , dan nilai maksimum relatifnya adalah 175,6273



Gambar 6c. Fungsi Bird

4. Fungsi *Camel-Six Humps*

$$f(x, y) = \left(4 - 2,1x^2 + \frac{x^4}{3}\right) x^2 + x y + (4y^2 - 4)y^2 \quad (10)$$

dengan  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2, -5 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 2\}$

Parameter yang digunakan  $r = 0,95, \theta = \pi/4, m = 100$ , dan  $k_{\max} = 100$

TABEL III  
 NILAI MAKSIMUM RELATIF FUNGSI CAMEL-SIX HUMPS

Percobaan	x	y	Nilai Maksimum Relatif
1	1,5071	1,508	44,5228
2	-1,5078	1,507	44,5229
3	1,5079	-1,5075	44,5229
4	-1,5077	-1,5076	44,5229

5. Fungsi *Egg Crate*

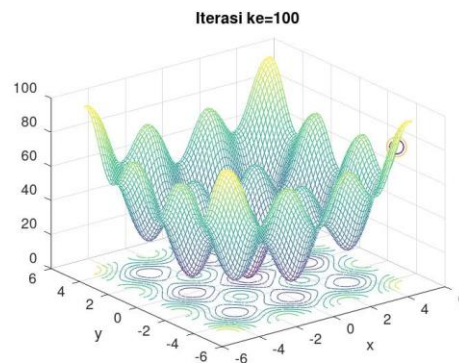
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 25(\sin^2(x) + \sin^2(y)) \quad (11)$$

dengan  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2, -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5\}$

Parameter yang digunakan  $r = 0,95$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $m = 100$ , dan  $k_{\max} = 100$

TABEL IV  
 NILAI MAKSIMUM RELATIF FUNSI EGG CRATE

Percobaan	x	y	Nilai Maksimum Relatif
1	4,5231	-4,523	80,7066
2	-4,5233	-4,5232	80,7066
3	4,523	4,523	80,7066
4	-4,523	4,523	80,7066



Gambar 6d. Fungsi Egg Crate

IV. KESIMPULAN

Algoritma metaheuristik spiral dinamik dapat digunakan untuk mencari semua nilai maksimum relatif dari fungsi non-linier di daerah domain yang diberikan dengan efisien. Dalam penelitian ini dimensi masalah optimasi yang digunakan adalah dua dimensi, namun dengan berkembangnya fenomena alam yang menggunakan lebih dari dua variabel bebas sehingga diperlukan pengembangan algoritma metaheuristik spiral dinamik untuk menyelesaikan masalah optimasi dengan dimensi yang lebih tinggi dengan menggeneralisasi model spiral dua dimensi menjadi n-dimensi. Algoritma metaheuristik spiral dinamik juga dapat digunakan untuk mencari nilai minimum fungsi non-linier dan akar dari persamaan non-linier dengan efisien. Perlu dilakukan riset lebih lanjut untuk membandingkan algoritma metaheuristik spiral dinamik dengan algoritma metaheuristik yang lain dalam menyelesaikan masalah optimisasi fungsi non-linier.

REFERENSI

[1] Wikipedia, Definisi Fungsi, (online), available: [https://id.wikipedia.org/wiki/Fungsi\\_%28matematika%29](https://id.wikipedia.org/wiki/Fungsi_%28matematika%29)  
 [2] A. Subandi, *Aljabar dan Kalkulus*, penerbit Rekayasa Sains, cetakan pertama, 2019.  
 [3] "Fungsi Non Linier", [online], available: <https://www-cuemath-com.translate.google/calculus/nonlinear-functions/>  
 [4] R. Munir, *Metode Numerik*, revisi keempat, penerbit Informatika Bandung, 2015.  
 [5] R. T. Handayanto, *Metaheuristic Optimization*, (online), available: <https://rahmadya.com/2019/02/21/metaheuristic-optimization/>  
 [6] M. Iqbal, M. Zarlis, dan H. Mawengkang, *Model Pendekatan Metaheuristik dalam Penyelesaian Optimisasi Kombinatorial*, Saintek, 2020. Available: <https://prosiding.seminar-id.com/index.php/sainteks>  
 [7] G. A. Tjiptarahardja, W. F. Tjong, dan D. Prayogo, "Optimasi Desain Struktur Portal Baja dengan Metode Metaheuristik", available: <https://publication.petra.ac.id/index.php/teknik-sipil/article/download/7691/6924>

- [8] X. S. Yang, "Nature – Inspired Optimization Algorithms", edisi pertama, Elsevier, 2014. Available: [https://msulaiman.org/onewebmedia/Xin-She\\_Yang\\_Auth\\_Nature-Inspired\\_Optimization\\_Algorithms.pdf](https://msulaiman.org/onewebmedia/Xin-She_Yang_Auth_Nature-Inspired_Optimization_Algorithms.pdf)
- [9] M. R. Hashim, M. O. Tokhi, "Chaotic Spiral Dynamics Optimization Algorithm", Clawar, 2016, p. 551 – 558. Available: <https://core.ac.uk/download/pdf/227105461.pdf>
- [10] K. Tamura, K. Yasuda, "Spiral Dynamics Inspired Optimization," JACII, vol 15, No. 8, pp. 1116-1122, 2011, available: <https://doi.org/10.20965/jaciii.2011.p1116>
- [11] K. A. Sidarto, A. Kania, "Finding All Solutions of Sitem of Nonlinear Equations Using Spiral Dynamics Inspired Optimization with Clustering", JACII, vol. 19, No. 5, 2015. Available: <https://doi.org/10.20965/jaciii.2015.p0697>
- [12] K. A. Sidarto, A. Kania, and N. Sumarti, "Finding Multiple Solutions of Multimodal Optimization Using Spiral Optimization Algorithm With Clustering", Mendel, vol. 23, No. 1, 2017. Available: <https://doi.org/10.13164/mendel.2017.1.095>
- [13] A. N. K. Nasir, R. M. T. Raja Ismail, and M. O. Tokhi, "Adaptive Spiral Dynamics Metaheuristic Algorithm for Global Optimization With Application to Modelling of A Flexible System", Applied Mathematical Modelling 40, 5442-5461, Elsevier, 2016. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2016.01.002>
- [14] J. W. Eaton, D. Bateman, S. Hauberg, and R. Wehbring, "GNU Octave A High – Level Interactive Language for Numerical Computations", edition 6, 2021. Available: <https://docs.octave.org/octave-6.3.0.pdf>
- [15] A. A. Nugroho, N. D. Rahmawati, dan Kartinah, "Geometri Transformasi", cetakan pertama, UPGRS Press, 2018. Available: <https://eprints.upgris.ac.id/2086/1/Buku%20Geometri%20Transformasi.pdf>
- [16] G. B. Thomas, Jr., M. D. Weir, J. Hass, and C. Heil, "Thomas' Calculus Early Transcendentals", thirteenth edition, PEARSON, 2014. Available: [https://rodrigopacios.github.io/mrpacios/download/Thomas\\_Calculus.pdf](https://rodrigopacios.github.io/mrpacios/download/Thomas_Calculus.pdf)
- [17] "Spiral", available: [https://5010-mathed-usu-edu.translate.goog/Fall2022/MGriffeth/Log%20Spiral.html? x\\_tr sch=http& x\\_tr sl=en& x\\_tr tl=id& x\\_tr hl=id& x\\_tr pto=tc](https://5010-mathed-usu-edu.translate.goog/Fall2022/MGriffeth/Log%20Spiral.html? x_tr sch=http& x_tr sl=en& x_tr tl=id& x_tr hl=id& x_tr pto=tc)
- [18] Wikipedia, Koordinat Polar, (online), available: [https://id.wikipedia.org/wiki/Sistem\\_koordinat\\_polar](https://id.wikipedia.org/wiki/Sistem_koordinat_polar)
- [19] Wikipedia, Spiral Logaritmik, (online), available: [https://id.wikipedia.org/wiki/Spiral\\_logaritmik](https://id.wikipedia.org/wiki/Spiral_logaritmik)
- [20] Wikipedia, Pilin, (online), available: <https://id.wikipedia.org/wiki/Pilin>